UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
PROFMAT

O Estudo da Incógnita nas Equações do 1º Grau Através da Análise de Livros Didáticos

MICHELLEN ALESSANDRA CALDAS SOUZA

Abaetetuba - PA
2021

O ESTUDO DA INCÓGNITA NAS EQUAÇÕES DO 1º GRAU ATRAVÉS DA ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

MICHELLEN ALESSANDRA CALDAS SOUZA

Dissertação submetida ao corpo docente do programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT) do campus de Abaetetuba da Universidade Federal do Pará como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Osvaldo Barros

(PROFMAT/UFPA - Orientador)

Prof. Dr. Pedro Sá

(PROFMAT/UFPA - Orientador)

Prof. Dr. Aubedir Seixas

(INSTITUIÇÃO – Membro Externo)

Prof. Dr. Rubenvaldo Pereira Monteiro

(INSTITUIÇÃO – Membro Externo)

Abaetetuba

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S719e Souza, Michellen Alessandra Caldas.
O Estudo da Incógnita nas Equações do 1º Grau Através da Análise de Livros Didáticos / Michellen Alessandra Caldas Souza. — 2021.
61 f.

Orientador(a): Prof. Dr. Osvaldo dos Santos Barros
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Abaetetuba, 2021.

1. Matemática. 2. Álgebra. Incógnita. 3. Livro didático. I. Título.

CDD 510

Às mulheres da minha vida: minha mãe Maria Marli e minha filha Mirella Arielle.

AGRADECIMENTOS

Inicio agradecendo a Deus pelo dom da vida, por estar presente em cada momento do meu dia, por não me deixar desistir e me dar forças sempre.

Agradeço à minha mãe Marly e a meu pai Ocivaldo pelo apoio incondicional nesse período que cursei o PROFMAT. Sem o apoio deles, nada seria possível.

Agradeço à minha filha, minha princesa Mirella, por “entender” que minha ausência não era em vão. Tudo o que eu faço é por ela também!

Agradeço à UFPA – campus de Abaetetuba pela oportunidade de fazer parte da 1ª Turma do PROFMAT ABAETETUBA, e aos meus professores do PROMAT por todo o ensinamento, aprendizagem e troca de experiências. Em especial ao professor Renato, pela amizade, conversas, e ao professor Dr. Osvaldo Barros por ter assumido este compromisso de me orientar na Dissertação.

Agradeço aos meus colegas de turma, pelas parceiras, brincadeiras, trocas, conversas, diversões... Foi uma honra estudar com vocês, e ser a única mulher desta turma. Cada um de vocês tem um lugar especial na minha vida e no meu coração. Inclusive, saudades!

Por fim, agradeço ao meu amigo Edson Luís por todo o incentivo e preocupação que teve comigo, desde à inscrição ao ENA até agora. Obrigada por ter orgulho de mim!

"Você tem que investir alguma energia e esforço para ver a beleza da Matemática."

(Maryam Mirzakhani)

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

a.C.	Antes de Cristo;
d.C.	Depois de Cristo;
a.E.C.	Antes da Era Cristã;
E.C.	Era Cristã;
BNCC	Base Nacional Curricular Comum

SOUZA, Michellen Alessandra Caldas. **O Estudo da Incógnita nas Equações do 1º Grau Através da Análise de Livros Didáticos**. 2021, 43 f. Dissertação (Mestrado Profissional Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal do Pará, Campus Universitário do Baixo Tocantins, 2021.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo verificar como os livros didáticos abordam o estudo de Equações do 1º Grau, em especial a Incógnita, no sétimo ano do Ensino Fundamental, de acordo com as competências e habilidades propostas pela BNCC para o referido ano. Desta forma, inicialmente foi feita uma abordagem histórica sobre a Álgebra e o surgimento de Equações, a partir de obras de vários autores. Este trabalho também reforça a importância do uso das letras como Incógnita para a aprendizagem de Equações, e realça a necessidade do aluno em compreender a linguagem algébrica bem como o significado da Incógnita para um melhor conhecimento e resolução de Equações do 1º Grau. Para isso, foram analisados livros didáticos do sétimo ano do Ensino Fundamental, a fim de conferir se estes contribuíam satisfatoriamente para o desenvolvimento algébrico dos alunos.

Palavras-chave: Matemática. Álgebra. Incógnita. Livro didático.

ABSTRACT

The present work aims to verify how textbooks approach the study of Equations of the 1st Degree, in particular the Incognita, in the seventh year of Elementary School, according to the competences and abilities proposed by the BNCC for that year. Thus, initially, a historical approach was made about Algebra and the emergence of Equations, based on the works of several authors. This work also reinforces the importance of using letters as Incognita for learning Equations, and highlights the student's need to understand the algebraic language as well as the meaning of Incognita for a better knowledge and resolution of 1st Degree Equations. For this purpose, textbooks from the seventh year of elementary school were analyzed in order to check whether they satisfactorily contributed to the algebraic development of the students.

Keywords: Mathematics. Algebra. Unknown. Textbook.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

O tema deste trabalho foi escolhido e desenvolvido a partir de observações feitas em sala de aula, durante o processo de ensino e aprendizagem de Equações do 1º Grau. Na minha prática docente, sempre percebi as dificuldades encontradas pelos alunos neste processo, pois não conseguiam atribuir significado ao estudo de Equação bem como à Incógnita, apenas realizando os procedimentos de resolução.

É notório também que os alunos não assimilam a importância da Incógnita na Equação do 1º Grau, uma vez que o papel desempenhado por esta dentro da Equação não é exposto e/ou suficientemente explicado aos alunos de modo que entendam que a Incógnita é peça fundamental para a resolução da Equação. Muitas vezes os alunos se perguntam "o que é *x*", para que serve", e não obtém resposta satisfatória. O professor também às vezes acaba trazendo o foco do estudo de Equações somente para a resolução, onde os alunos busquem apenas encontrar o valor de *x*, sem relacionar o conceito de Incógnita, os princípios de equivalência, etc.

Neste sentido, se observou ainda que alguns livros didáticos não expõem o significado da Incógnita, mostrando o seu conceito, e deixando, assim, espaços, lacunas, a serem preenchidas no processo de ensino de Equações. Afinal, uma vez que não se aplica os conceitos da Incógnita, o foco se torna apenas o processo de resolução da equação, não evidenciando inicialmente a sua compreensão. Vale lembrar que o livro didático é o recurso mais utilizado pelo professor em sala de aula, sendo muitas vezes o único. Logo, o livro didático precisa abranger todas as competências e habilidades estabelecidas pela BNCC para os referidos anos, neste caso, o 7º ano do Ensino Fundamental.

Assim, percebia que a maior dificuldade dos alunos estava em enxergar o conceito e a finalidade da Incógnita na Equação do 1º Grau. O aluno acabava entendendo que a Equação se resumia em "isolar o *x*" para encontrar o valor, sem estabelecer um significado mais concreto para esse processo, em especial ao papel da Incógnita.

Desta forma, analisamos como alguns livros didáticos abordam o conceito da Incógnita na Equação do 1º Grau e como se dá o processo de resolução. Foram considerados os aspectos principais da Equação, e se os livros didáticos em questão suprem a necessidade de compreensão dos alunos dentro do processo de ensino e aprendizagem.

Sendo assim, buscou-se compreender por que certos livros didáticos trazem essa abordagem incompleta acerca do conhecimento da Incógnita, fazendo que os alunos não consigam entender de forma ampla o estudo da Equação do 1º Grau.

Com isso, o objetivo deste trabalho foi evidenciar a abordagem da Incógnita na Equação do 1º Grau nos livros didáticos: como se dá a apresentação de conceitos, os procedimentos de resolução, e assim verificar o processo de ensino e aprendizagem dos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental.

INTRODUÇÃO

Equação do 1º Grau é um tema de grande relevância no ensino de Matemática, já que é um dos conteúdos iniciais da Álgebra, estudados no Ensino Fundamental. Todavia, não é uma tarefa fácil a nós, docentes, trabalhar este conteúdo nesses anos. Neste sentido, o estudo deste conteúdo matemático exige um entendimento que vai além das notações apenas numéricas, pois começa a operar com números e letras simultaneamente. Sendo assim, se observa que uma das maiores dificuldades encontradas pelos alunos é entender o significado dessas letras na Equação, que são chamadas de Incógnitas.

Ao longo da história, a Álgebra tem usado letras para representar quantidades desconhecidas, e assim resolver Equações através da Incógnita. Porém, são notórias as dificuldades recorrentes do processo de ensino de Equações, pois muitos alunos não conseguem compreender a contextualização do referido conteúdo nem tampouco relacioná-lo com o cotidiano.

Assim, na maioria das vezes, o ensino de Álgebra tem se limitado a aplicar regras, resolvendo exercícios repetitivos. Como nos diz Baldim (2008, p. 15), "(...) o que é pedido aos alunos é que saibam aplicar essas regras e procedimentos numa determinada expressão, sem que percebam a sua estrutura, o seu significado ou aplicações aos problemas fora dos livros". O professor, por sua vez, mostra ao aluno a significação dos conceitos e métodos de resolução, porém este aluno, na maioria das vezes, não compreende, e então se atém ao fato de apenas aplicá-los.

Uma das grandes dificuldades dos alunos está na compreensão da Incógnita da Equação, pois não conseguem atribuir um "objetivo", um significado para ela dentro da Equação, dentro da linguagem formal própria da Álgebra, bem como na sua resolução.

Desse modo, surge a seguinte problemática: **os livros didáticos abordam de maneira satisfatória a Incógnita no conhecimento e na resolução de Equações do 1º Grau?**

Partindo dessa problemática, pretende-se mostrar se os livros didáticos estão de acordo com as habilidades e competências propostas pela Base Nacional Curricular Comum (BNCC), para o ensino de Equações no sétimo ano do Ensino Fundamental, onde o aluno possa melhor compreender os significados dados aos símbolos matemáticos em uma linguagem algébrica e, assim, melhorar sua aprendizagem a partir de outras abordagens, construindo um pensamento algébrico.

Assim, o texto está dividido em quatro capítulos. O primeiro capítulo fala um pouco sobre a história da Álgebra e das Equações, seu surgimento, as primeiras impressões, a importância de alguns povos nesse processo, bem como a relevância da utilização da Incógnita, com base dos trabalhos de alguns teóricos e visão crítica de Roque (2012). No segundo capítulo, mostraremos as várias formas como a Álgebra pode ser abordada segundo a BNCC, e também como se dá a relação entre pensamento algébrico e linguagem algébrica. Já no terceiro capítulo, explanaremos sobre a importância da Incógnita no conhecimento da Equação, definição e resolução. Por fim, no quarto capítulo, faremos um breve levantamento de livros didáticos do 7º ano do Ensino Fundamental, sobre como alguns autores realizam a abordagem da Incógnita no ensino de Equações do 1º Grau no ano em questão, durante o processo de ensino-aprendizagem dos alunos.

1 – A HISTÓRIA DA ÁLGEBRA E O SURGIMENTO DAS EQUAÇÕES

Os primeiros conhecimentos matemáticos foram sendo acumulados a partir de situações práticas, voltadas à resolução de problemas, em muitos casos, segundo Duncan (1999, p.123) “voltados à produção e comercialização de produtos agrícolas e diferentes insumos, além da produção de calendários que orientavam a periodicidade de rituais, como é o caso dos eventos astronômicos, como os eclipses e as estações sazonais”. Segundo Garbi (2009, p. 09), os mais antigos documentos contendo registros numéricos são tabletes de barro sumérios, de meados do IV milênio a.C. Porém, somente em tabletes sumérios de 2 200 a.C. que aparecem operações feitas com números, dentro de um sistema de numeração posicional com 60.

Também há um tablete babilônico de 1 700 a.C. e encontrado no século XIX, que era um “livro de exercícios” de Matemática. Desse modo, pode-se dizer que nesse período as descobertas matemáticas não mais se faziam de maneira puramente indutiva e contavam com o apoio de algum raciocínio dedutivo não-formalizado.

O caminho percorrido pela Álgebra para chegar ao que hoje conhecemos foi longo, de quase 2 mil anos, onde passa da formulação textual (verbal) até chegar numa linguagem simbólica. Segundo Baumgart (1992, p. 01), a palavra Álgebra é uma variante latina da palavra árabe *al-jabr*, que foi usada no título do livro *Hisab al-jabr w´al-muqabalah*, escrito em Bagdá por volta de 825 d.C., pelo matemático árabe Mohammed ibn-Musa al-Khowarizmi. Desse modo, o autor conclui que a melhor tradução para a palavra Álgebra seria a ‘ciência das equações”.

Baumgart (1992, p. 03) reitera que a Álgebra deve ser dividida em duas fases: **Álgebra antiga**, que abrange o período de 1700 a.C. a 1700 d.C. e estuda as Equações e seus métodos de resolução, e **Álgebra moderna**, que estuda as estruturas matemáticas, sendo que esta divisão é cronológica e conceitual.

A fase antiga se caracteriza pela invenção gradual do simbolismo e pela resolução de equações por vários métodos, com poucos progressos até a resolução de equações cúbicas e quárticas. Esse desenvolvimento da notação algébrica se deu em três estágios: **retórico (ou verbal)**, onde não havia o uso de simbologias, **sincopado**, iniciado por Diofanto, onde usavam abreviações de palavras, e **simbólico**, desenvolvido a partir dos trabalhos de Viète, no século XVI.

A história da Álgebra e o surgimento das Equações, explicitados neste trabalho, trazem como referência o livro “História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas”, de Roque (2012), que traz relatos da história da Matemática através de um novo olhar, mostrando as relações das práticas matemáticas e seu contexto.

1.1 – MESOPOTÂMIA E EGITO

Os primeiros registros de algo considerado como escrita datam de aproximadamente quarto milênio antes da Era Cristã (*a.E.C.*), na Baixa Mesopotâmia, e surgiram da necessidade de registrar quantidades, e organizar a sociedade. O surgimento e da matemática estão intimamente relacionados. A maioria dos primeiros tabletes de argila citados na história datam do período de 2000 a 1600 a.E.C.

Imagem nº 1. O tablete Plimpton 322

Fonte: Roque (2012, p.57)

Os babilônios possuíam vários tabletes equivalentes às nossas tabuadas, trazendo operações como multiplicação, quadrados, cubos, raízes quadradas e cúbicas, entre outros. Além desses, também tinham tabletes de procedimentos, com exercícios resolvidos. No tablete BM 13901, p.ex., localizado atualmente na coleção do British Museum, o primeiro problema é:

“Adicionei a área e o lado de um quadrado: obtive 0,45. Qual o lado?”. A solução apresentada é:

(i) tome 1

(ii) fracione 1 tomando a metade (:0,30)

(iii) multiplique 0,30 por 0,30 (:0,15)

(iv) some 0,15 a 0,45 (:1)

(v) 1 é a raiz quadrada de 1

(vi) subtraia os 0,30 de 1

(vii) 0,30 é o lado do quadrado

Assim, Roque reitera que este tipo de procedimento pode ser tratado como as Equações do tipo $AX^2 + BX = C$, que conhecemos. Logo, a matemática babilônica seria de natureza algébrica. Garbi (2009, p. 11) ressalta que

> Os matemáticos e astrônomos babilônicos do II milênio a.C. realizaram feitos surpreendentes: **eles conheciam a propriedade geral dos triângulos retângulos (o hoje chamado teorema de Pitágoras, também já conhecido pelos chineses no século XII a.C.), resolviam equações do primeiro e do segundo graus, calculavam áreas e volumes de certas figuras geométricas, determinaram a raiz de 2 com precisão, etc.** Certamente, a essas alturas, as descobertas matemáticas não mais se faziam de maneira puramente indutiva e contavam com o apoio de algum raciocínio dedutivo não formalizado, que desconhecemos.

Logo, os babilônios conseguiam trabalhar com equações do 2º grau resolvendo-as por um método baseado no mesmo raciocínio empregado pelos hindus, no que hoje chamamos de “completamento do quadrado”, embora não usassem uma justificativa lógica sobre o caminho seguido para as soluções das equações do 2º grau. Era uma linguagem puramente retórica e com fortes evidências geométricas. Mol (2013, p. 19) destaca que “a variável x era chamada de lado e x^2 de quadrado. No caso de duas incógnitas, elas eram chamadas de comprimento e largura”.

No antigo Egito, a Matemática surgiu a partir das necessidades administrativas, como a quantificação e o registro de bens, desenvolvendo assim sistemas de medidas. Os escribas eram os responsáveis pela administração do Egito, e utilizavam os papiros matemáticos para problemas e suas soluções. Assim, a matemática egípcia começou a ser conhecida através de papiros, muitos de conteúdos matemáticos. Dentre esses antigos documentos matemáticos que chegaram aos dias de hoje, temos o Papiro de Rhind, um longo papiro egípcio, de cerca de 1 650 a.C., e o Papiro de Moscou, de cerca de 1 850 a.C. Em ambos os papiros aparecem problemas que contêm, tímida e disfarçadamente, equações do 1º grau.

O Papiro de Rhind, foi escrito em hierático, e era uma forma cursiva de escrita, e datado de aproximadamente 1650 a. E. C.; recebe este nome por causa de Alexander Henry Rhind, que comprou este papiro por volta de 1850, em Luxor. Também pode ser chamado de Papiro de Ahmes, em homenagem a ao escriba egípcio que o copiou. Nesse papiro, ensina as soluções de 85 problemas de álgebra e geometria. Entre os problemas, há frações, equações lineares, cálculo de volumes e de áreas.

Imagem nº 2. Trecho do Papiro de Rhind

Fonte: MOL, 2013, p. 22

Um dos problemas de Ahmes diz que: “Uma quantidade, somada a seus 2/3, mais sua metade e mais sua sétima parte perfaz 33. Qual é a quantidade?” Usando a simbologia atual temos que: $\boldsymbol{x+\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{7}x=33}$, que é uma equação do 1º Grau. Porém, naquela época, não se usava a simbologia que hoje conhecemos. Os números eram representados por símbolos e o desenvolvimento das resoluções eram expressas por palavras (a chamada álgebra retórica, que já foi mencionada anteriormente).

Agora tomando como exemplo o problema 25 do Papiro de Ahmes, temos: “Uma quantidade e sua metade somadas fazem 16. Qual a quantidade?”. Assim, admitindo que a quantidade seja 2, temos que 2 somado à sua metade dá 3. Mas queremos uma quantidade que somada à sua metade dê 16. Logo, devemos procurar o número pelo qual multiplicar 3, até dar 16. Então, a quantidade procurada é 10 2/3. Esse método é o que conhecemos como “método da falsa posição”, onde se inicia com um palpite falso até chegar ao resultado correto.

Assim, os egípcios usavam um artifício chamado de “Regra da Falsa Posição”, onde se fazia uma hipótese inicial conveniente a respeito do número e se verificava o que podia ocorrer. Garbi (2009, p. 12) nos traz o seguinte exemplo: “Qual o número que somado à sua terça parte dá 8?” Pela Regra da Falsa Posição, se fazia uma suposição inicial sobre o número e se observava o que ocorria. Supondo, por exemplo, que o número fosse 3, teremos que 3 somado com sua terça parte dá 3 + 1 = 4, ou seja, a ***metade*** dos 8 que deveria dar. Portanto, o número procurado é o ***dobro*** de 3, ou seja, 6.

Este papiro traz outros problemas semelhantes, que podem resolvidos pela mesma técnica. Isso traz uma generalidade que possibilita o uso de linguagem algébrica. Ou seja, essa generalidade resulta em um enunciado para resolver a equação e encontrar o valor de x. Vale lembrar que nem todos os problemas do Papiro de Ahmes eram resolvidos pelo método da falsa posição; haviam outros tipos de problemas com estratégias específicas de solução.

O Papiro de Moscou foi adquirido pelo egiptólogo russo Vladimir Golenishchev no final do século XIX. É mais antigo que o Papiro de Ahmes e possui 25 problemas de aritmética e geometria com soluções. O problema 14 deste papiro traz uma descrição verbal (o que hoje conhecemos como fórmulas) do cálculo correto do volume de um tronco de uma pirâmide de base quadrada, não havendo uma referência de como esta resolução foi obtida. Dessa forma, provavelmente já havia algum trabalho teórico sobre como obter tal resultado, dada a complexidade desta expressão.

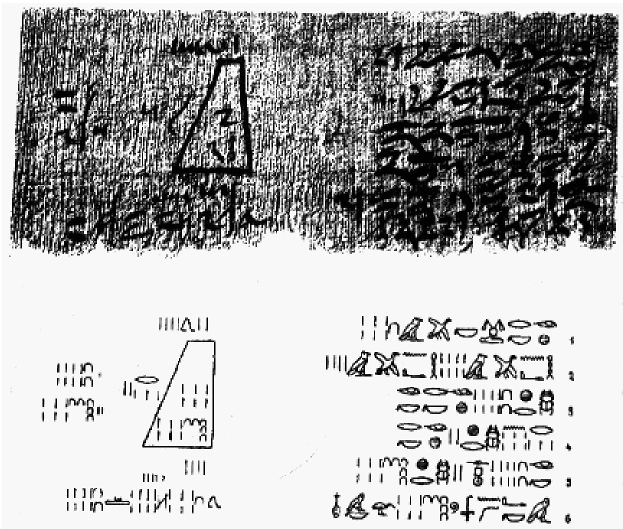

Imagem nº 3. Trecho do Papiro de Moscou

Fonte: https://matematica.br/historia/pmoscou.html

Mol (2013, p. 25) diz que muitos problemas encontrados nos Papiros de Ahmes e de Moscou se referem à repartição de víveres, animais e objetos, e eram resolvidos de forma aritmética ou por meio de equações lineares da forma $x + ax = b$ ou $x + ax + bx = c$. Os egípcios também trabalhavam com frações de numerador 1, exceto pela fração $\frac{2}{3}$, o que dificultava resolver essas equações.

Roque (2012, p. 28) ainda observa que

> Os tabletes e papiros indicam que o modo como os cálculos eram realizados em cada cultura dependia intimamente da natureza dos sistemas de numeração utilizados. Por isso, cálculos considerados difíceis em um sistema podem ser considerados mais fáceis em outro. Isso mostra que as noções de “fácil” e de “difícil” não são absolutas e dependem das técnicas empregadas.

Desse modo, uma das principais características das matemáticas mesopotâmica e egípcia é que realizavam procedimentos de cálculos sobre coisas que podem ser medidas. Logo, os procedimentos para resolução de problemas numéricos que eram tratados como “algébricos”, devem ser tratados como cálculos com grandezas.

Vale ressaltar que ainda no antigo Egito, os problemas de multiplicação e divisão envolvendo frações eram resolvidos aplicando sequencias de duplicação e divisão por 2. Porém, em situações mais complexas, como as de frações com denominador ímpar, utilizavam tabelas de cálculo.

1.2 – GRÉCIA

Roque (2012, p. 79) ressalta o fato de que os primeiros matemáticos gregos, assim como os outros povos antigos, praticavam uma geometria baseada em cálculos de medidas. Dessa forma, os problemas geométricos eram transformados em problemas numéricos a partir da conversão das medidas, seja comprimento, área ou volume, em um número. Entretanto, não há fonte confiáveis que comprovem uma transição da matemática mesopotâmica e egípcia para a grega. Mesmo havendo semelhanças entre as culturas, não se sabe como pode ter tido esta interação.

Por volta do século VII a.E.C. surgiram traços da cultura oriental na Grécia, relacionados ao cultivo, produção de bens e atividades administrativas. Já o crescimento populacional e a dispersão dos gregos pela bacia do Mediterrâneo, durante os séculos V e VI a.E.C., deram origem às *pólis* (cidade grega), o que foi fundamental para a organização política e administrativa da Grécia. Com isso, o pensamento racional ganhou impulso nessa nova organização: os filósofos da Escola de Mileto passaram a formular pensamentos a partir de elementos passíveis de racionalidade.

No final do século V a.E.C., Platão e Aristóteles buscavam critérios para distinguir raciocínios e estabelecer verdades. Este tipo de discurso se chamou de filosofia, e se serviram da matemática para construir esse pensamento, uma vez que tudo deve recorrer do que já foi dito anteriormente, sem contradições.

Dessa forma, Roque (2012, p. 81) tem por objetivo “reconstituir o contexto em que, na Grécia, a matemática se tornou um saber teórico, que lida com entes abstratos”. Afinal, neste contexto histórico, o conceito de abstrato está associado à prática geométrica. Porém, grande parte do conhecimento sobre a matemática grega é decorrente das obras de Platão, Aristóteles, Euclides, Proclus e Eudemo de Rodes, que era pupilo de Aristóteles, e viveu no século IV a.E.C.

Há evidências de que em alguns escritos do século VI a.E.C., e que ainda circulavam na época de Eudemo, continham enunciados geométricos atribuídos a Tales. Proclus também atribuiu a Tales um teorema sobre congruência de triângulos. Já Aristóteles considera Tales o fundador da filosofia.

Vale ressaltar as contribuições da Escola pitagórica do século V a.E.C. Nesta época, o pensamento geométrico já estava desenvolvido, mas não se sabe como os pitagóricos contribuíram para isso. Roque (2012, p. 87) explica a concepção dos pitagóricos sobre a natureza: “O mundo é determinado, antes de tudo, por um arranjo bem-ordenado e tal ordem se baseia no fato de que as coisas são delimitadas e podem ser distinguidas umas das outras. Quando se diz que as coisas podem ser distinguidas não significa que elas não possam ser diferentes, e sim separadas umas das outras, logo, as coisas do mundo podem ser contadas”. Assim, para os pitagóricos, todas as coisas consistem de números, que podem ser organizadas, distinguidas e contadas.

O teorema associado a Pitágoras estabelece uma relação entre as medidas dos lados do triangulo retângulo, e traz o enunciado: “O quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos”. No entanto, outros mais antigos já sabiam dessa relação, o que pode ter sido um saber comum à época. Roque (2012, p. 95) tem como objetivo “investigar de que modo esse resultado podia intervir na matemática pelos pitagóricos, com as características anteriormente descritas”. Neste sentido, a autora ressalta que “não deve ter havido um teorema geométrico sobre o triangulo retângulo demonstrado pelos pitagóricos, e sim um estudo das chamadas triplas pitagóricas”.

As triplas pitagóricas são compostas de dois números quadrados e um terceiro que é a soma dos dois primeiros. Esses números são inteiros e podem ser relacionados às medidas dos lados de um triângulo retângulo. Possivelmente os pitagóricos chegaram às triplas através de *gnomon*, que é um dispositivo do relógio solar, importante no início da geometria grega, e que designou o dispositivo em forma de esquadro.

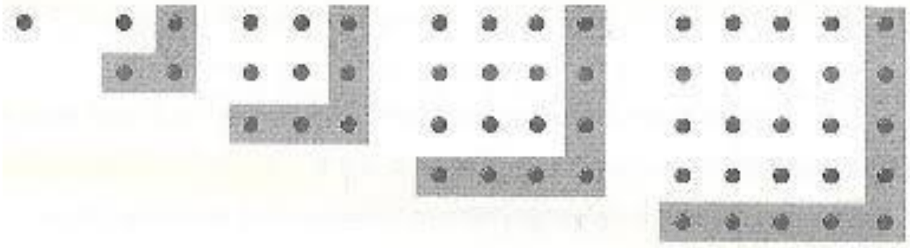

Imagem nº 4. Triplas pitagóricas

Fonte: Roque (2012, p. 96)

Assim, para calcular a sequência dos quadrados era usado o deslocamento dos esquadros, semelhante à soma de sequência de números ímpares. P. ex., para obter o 4 a partir do 1, adiciona o *gnomon* de três pontos; para obter o 9 a partir do 4, adiciona o *gnomon* de cinco pontos, e assim sucessivamente. Dessa forma, chegou à figura onde o *gnomon* de nove pontinhos, que é um número quadrado, e se obtém a igualdade: 16 + 9 = 25, originando a tripla pitagórica (3, 4, 5). Logo, as triplas pitagóricas são obtidas a partir de procedimentos aritméticos.

Ainda sobre a matemática grega, Roque retrata sobre a obra *Elementos* de Euclides, que é tida como o ápice do esforço da organização da geometria grega, até o século III a. E. C., por promover a transição do pensamento dedutivo. Assim, considera-se que as figuras geométricas deviam ser construídas com régua e compasso.

Porém, Roque questiona "até que ponto o padrão que esse livro exprime era realmente preponderante na matemática que se desenvolveu antes e depois de Euclides" (p. 133). Dessa forma, a autora tem como objetivo no seu texto "relativizar a tese da influência platônica na reorganização da geometria, bem como o papel das técnicas de construção propostas nos Elementos no contexto das práticas gregas de resolução de problemas".

Neste contexto, Roque observa que limitar construções ao uso de régua e compasso, conforme mostra a obra de Euclides, não é algo único na geometria grega, visto que "a explicação de que se tratava de uma restrição imposta pela filosofia platônica já não é satisfatória, uma vez que a matemática antiga não parece ter sido parte de um exercício de filosofia" (ROQUE, 2012, p. 134).

Apesar dos *Elementos* de Euclides possuírem um estilo geométrico, entre o final do século XIX e meados do século XX, historiadores postularam que algumas proposições desta obra seriam propriedades algébricas, onde os resultados do livro II dos *Elementos* são chamados de 'álgebra geométrica", pois são formulações geométricas de regras algébricas, como as da equação do segundo grau. No entanto, Roque (2012, p. 166-

167) reitera que embora "as proposições do livro II dos Elementos possam ser interpretadas algebricamente, suas demonstrações são essencialmente geométricas e utilizam as propriedades geométricas particulares das figuras em questão". As demonstrações de Euclides não utilizavam propriedades de operações algébricas, o que não traz evidências de que houvesse um pensamento algébrico.

1.3 – OS ÁRABES E OS INDIANOS

A Matemática possui grandes contribuições vindas da Índia e do Império Árabe, que trouxeram consequências importantes.

Roque (2012, p. 194) nos traz a ideia que a história da Álgebra é claramente associada aos métodos propostos por Diofanto, aproximadamente no século III E.C., sendo considerado um dos pais da Álgebra. Entretanto, para falar da história precisamos caracterizar o que entendemos por álgebra, mas não tomando por base sua definição atual. Assim, Roque (2012, p. 195) reforça que "o passo decisivo para a constituição da álgebra como disciplina pode ser visto como a organização de técnicas em torno da classificação e da resolução de equações, o que teve lugar no século IX, com os trabalhos de Al-Khwarizmi e de outros matemáticos ligados a ele".

A primeira ocorrência da notação simbólica, característica da Álgebra, remonta ao livro *Aritmética*, escrito em grego por Diofanto. Sua contribuição mais conhecida foi introduzir uma forma de representar o valor desconhecido em um problema, denominado de *arithmos*, daí o nome "aritmética". O livro *Aritmética* é composto por uma coleção de problemas, que traziam a tradição matemática daquela época. Já no livro I, Diofanto introduziu símbolos, que os chamou de "designações abreviadas", e que representavam quantidades diversas, presentes nos problemas. No método de abreviação, ele usava a primeira ou a última letra da palavra a ser representada, de acordo com o alfabeto grego. Assim:

ς (última letra da palavra arithmos, a quantidade desconhecida)

Δ^{Y} (primeira letra de dynamis, o quadrado da quantidade desconhecida)

K^{Y} (primeira letra de kybos, o cubo)

$\Delta^{Y}\Delta$ (o quadrado-quadrado) [quarta potência]

ΔK^{Y} (o quadrado-cubo) [quinta potência]

$K^{Y}K$ (o cubo-cubo) [sexta potência]

A seguir, traremos o problema 27 do livro I, bem como sua solução.

Problema I-27: Encontrar dois números com soma e produto dados.

Descrição da solução: Ele considera que a soma é 20 e o produto, 96. Supondo que a diferença entre os dois números seja 2 *arithmoi*, começamos por dividir a soma desses números (que é 20) em dois (obtendo 10). A partir desse resultado, consideramos um *arithmos* somado a e subtraído de, respectivamente, cada uma das metades. Como a metade da soma é 10, tomando a metade subtraída de 1 *arithmos* mais a metade acrescentada de 1 *arithmos* obtemos 20, que é a soma desejada. Para que o produto seja 96, multiplicamos essas mesmas quantidades, obtendo 100 subtraído do quadrado do *arithmos* (um *dynamis*). Chegamos, assim, à conclusão de que o *dynamis* deve ser 4, logo, o valor do *arithmos* é 2. Os valores procurados serão, portanto, 10 mais 2 e 10 menos 2, ou seja, 12 e 8.

Sendo assim, podemos observar que não há construção geométrica para encontrar a solução do problema, e na resolução ele opera as quantidades desconhecidas da mesma forma que as quantidades conhecidas. Porém, alguns historiadores não consideram esse tipo de representação como um simbolismo, pois como nos diz Roque (2012, p. 208):

> Símbolos não são somente abreviações ou notações empregadas para facilitar a prática de procedimentos de cálculo e resolução de problemas; o simbolismo algébrico é um tipo de representação que conduz a abstrações que não estavam presentes na Aritmética de Diofanto. Para caracterizar o pensamento algébrico não basta associá-lo ao uso de símbolos, e menos ainda ao uso de abreviações.

Assim, os termos usados por Diofanto e suas abreviações, são utilizados para resolver problemas através de uma explicação dos operações realizadas com estes termos. Após isso, do problema surge uma igualdade, uma equação, onde os números são agrupados em espécies que correspondem aos monômios que conhecemos, Ax^m. A partir daí, a quantidade desconhecida pode ser determinada, através da equação $Ax^m = B$.

Para tanto, Roque reforça que Diofanto tem seu lugar na história da Álgebra, pois seus traços da matemática são interpretados como “uma antecipação imperfeita de técnicas, simbolismos e generalizações típicas da prática algébrica nos nossos dias” (ROQUE, 2012, p. 210).

A matemática indiana contribuiu de maneira mais significativa com o sistema de numeração decimal posicional e com o uso de nove símbolos e o zero. Esse sistema foi resultado da incorporação de elementos de outros povos e, claro, um processo longo de evolução. A primeira referência do zero é do século IX, e sua grafia passou por várias transformações até chegar à forma atual.

Alguns textos envolvendo astronomia, datados do século III E. C., já traziam o sistema decimal posicional e um símbolo para o zero. Mas as evidências sobre a astronomia se tornavam mais significativas em meados do primeiro milênio. Os autores integravam elementos tradicionais das matemática, como conceitos de astronomia, calendário e sistema decimal posicional, complementos de obras gregas, como trigonometria plana, astrologia e modelos cosmológicos.

Assim, Mol (2013, p. 64) nos mostra que em 499 E. C., o matemático hindu Aryabhata publicou uma obra intitulada *Aryabhatiya*, uma das obras mais importantes da matemática e astronomia indianas. Continha regras de cálculo, procedimentos para raízes quadradas e cúbicas, e regras trigonométricas, usadas na astronomia. Roque (2012, p. 212) reforça ainda que esta obra continha a sistematização das técnicas de cálculo, chamada "ganita", que era utilizada como o estudo dos métodos de cálculo em geral e voltados não somente para a astronomia.

Mol (2013, p. 64) também cita que no século VII d.C., o matemático e astrônomo Brahmagupta contribuiu com conceitos essenciais para o desenvolvimento da álgebra. Já Roque (2012, p. 212) ressalta que tal matemático também dedicou uma parte do seu estudo à "ganita": com operações aritméticas, razoes e proporções, juros, cálculos de comprimentos, áreas e volumes de figuras geométricas. Ainda estabeleceu regras para os números negativos e positivos de maneira sistematizada, métodos de eliminação do termo médio e redução à uma variável. Alguns procedimentos utilizados por Brahmagupta são citados mais tarde por Bhaskara (1114-1185).

Os livros de Bhaskara mais conhecidos são *Lilavati* e *Bija Ganita*, que trazem novamente a prática da "ganita", já apresentada nos escritos de Aryabhata e Brahmagupta. Esses livros também continham o sistema decimal posicional, operações com frações e zeros. Os hindus ainda reconheciam os raízes irracionais de números como números, pois para eles não havia distinção entre valores exatos e aproximados.

Mas a fórmula geral para a solução das equações do 2º grau é algo que facilmente ligamos à Bhaskara, como nos mostram os livros de matemática. Vale lembrar que não foi ele que descobriu esta fórmula; ela foi descoberta um século antes pelo matemático hindu Sridhara e publicada em uma obra que não chegou até nós. Mesmo assim, é o feito mais famoso de Bhaskara, que amplamente conhecido na nossa civilização.

Buscava-se uma forma de reduzir o grau das equações, do 2º para o 1º, o que foi possível com a Fórmula de Bhaskara. Assim, seja a equação do 2º grau:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ com } a \neq 0$$

Dividindo essa equação por a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Para extrair a raiz quadrada do binômio, que não era um quadrado perfeito, foi somado aos dois lados da igualdade algo que tornasse o binômio um quadrado perfeito, técnica que já era usada pelos babilônios há 3 000 anos antes. Neste caso, foi somada a expressão $+\frac{b^2}{4a^2}$. Assim, tem-se:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

A partir daqui, podemos extrair raízes quadradas, mas os babilônios ainda não sabiam que *números positivos ou negativos elevados ao quadrado sempre são positivos.* Portanto, pode gerar duas soluções: uma positiva e uma negativa. Ou seja:

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Vale lembrar que a simbologia utilizada aqui não existia naquela época, e que os babilônios foram os primeiros descobrir esta fórmula, sendo redescoberta pelos hindus muitos anos mais tarde.

A matemática dos árabes foi proveniente da matemática dos babilônios e dos gregos, mas a sua contribuição para a matemática foi além da assimilação e preservação desses conhecimentos herdados. Baumgart (1992, p. 76) reforça que “a álgebra arábica proveio da álgebra dos hindus e gregos. Os árabes tratavam a álgebra numericamente, como os hindus, e geometricamente, como os gregos”. Desse modo, é importante salientar que alguns problemas e técnicas desta época eram relacionados com a matemática dos babilônios e egípcios, como as frações unitárias, e também alguns problemas recreativos, como do jogo do tabuleiro de xadrez. Assim, podemos presumir que havia uma matemática prática e recreativa em concordância com as matemáticas babilônia e egípcia, que se espalharam pelo Oriente, onde os árabes retomavam problemas do senso comum a fim de lhes dar um tratamento mais sistemático.

Roque (2012, p. 217) reforça que em alguns problemas práticos, como no caso de heranças, exigiam o desenvolvimento da matemática, já que s herança não era dividida igualmente entre os membros da família. Para isso, usavam métodos aritméticos, com o cálculo de frações, e o método da falsa posição. Possivelmente daí surgiram os primeiros problemas, com um enunciado mais retorico, equivalentes ao que hoje chamamos de equações do segundo grau.

Vamos destacar também a importância do contexto religioso da época. A partir dos ensinamentos de Maomé (c. 570 – 632 d.C.) e do texto sagrado do Alcorão, surgiu a religião muçulmana. Maomé fundou um Estado baseado na fé islâmica e liderado pelos califas, que eram seus sucessores, conquistando territórios vizinhos com muita rapidez. Assim, os árabes encontraram civilizações mais desenvolvidas que a sua, e foram construindo sua civilização e cultura próprias, onde a ciência passou a ter um lugar de destaque: as cidades se transformaram em centros de saber científicos e os califas árabes passaram a patrocinar as pesquisas científicas; os trabalhos de matemáticos hindus foram traduzidos e o sistema de numeração deles começou a ser utilizados na Arábia.

Outro fator essencial para o desenvolvimento da matemática foi a tradução das obras gregas, que começaram a ser feitas por volta do século VIII. Mol (2013, p. 66) nos diz que o califa al-Mansur (c. 714 -775) construiu a cidade de Bagdad para fazer uma nova capital, e fundou uma biblioteca, onde inicialmente traduzia textos persas, hindus e gregos, para o árabe. Garbi (2009, p. 23) complementa dizendo que o califa Harun al-Rashid, conhecido pelos Contos da Mil e uma Noites, ordenou que *Os Elementos de Euclides* também fossem traduzidos.

Entre os séculos VII e XIX, o califa Al-Mamun estabeleceu a "Casa da Sabedoria", ou Casa do Saber, onde havia uma biblioteca que colecionava e traduzia os manuscritos gregos, e outras bibliotecas e observar para se estudar as ciências estrangeiras.

Assim, Roque (2012, p. 218) ressalta sobre o lugar privilegiado adquirido pela matemática, filosofia e astronomia, nesta primeira fase do império muçulmano, pois eram praticadas por vários homens cultos que viviam nos locais citados, e falavam diversas línguas. Neste sentido,

> a influência filosófica impunha um padrão geométrico à álgebra, ainda que essa restrição não fosse significativa. As práticas se desenvolviam sem muita preocupação com cânones de ordem normativa. Não é difícil imaginar que a tradução das primeiras obras de astronomia e matemática, bem como dos primeiros escritos originais, tenha motivado, automaticamente, a tradução de novas obras, dando origem a uma prática importante de tradução até a constituição de um corpo razoável de obras científicas. (ROQUE, 2012, p. 219)

Desta forma, Bagdad se tornou um dos maiores centros científicos do mundo, entre os séculos VII e XII, sendo que que seus matemáticos tinham conhecimento tanto das obras gregas quanto das orientais. E foi a partir do século XIX que esta cultura matemática evoluiu, tendo a Álgebra como um dos seus pontos fortes. Um dos mais notáveis estudiosos desta época foi o matemático e astrônomo Muhammed ibn Musa al-Khwarizmi (c. 780-850).

Roque (2012, p. 221) corrobora dizendo que "a álgebra tem origem no estudo sistemático dos métodos para classificar e resolver equações, o que teve lugar com os trabalhos árabes iniciados por Al-Khwarizmi". Os elementos necessários para o desenvolvimento das equações já existiam como os gregos e hindus, mas foram os árabes que se abriram novas perspectivas sobre o assunto.

Os árabes expandiram os conhecimentos adquiridos nas obras gregas e desenvolveram a Álgebra, rompendo com essa predominância do conhecimento grego. Assim, Além da teoria das equações, eles criaram um cálculo algébrico sobre expressões polinomiais e estenderam as operações aritméticas a essas expressões, bem como a quantidades que os antigos não consideravam números, caso dos irracionais.

Uma de suas obras mais influenciadoras de Al-Khwasrizmi foi o *Al-Kitab al-jabr wa'l Muqabalah*, o Livro da Restauração e do Balanceamento. Mol (2013, p.67) nos explica que "esse livro é considerado o fundador da álgebra como área do conhecimento matemático, sendo a palavra álgebra uma evolução do termo *al-jabr*". Este termo era usado para representar "restauração", uma das operações utilizadas na resolução de equações. Já *al-muqabalah* significa algo como "balanceamento". Logo, estes termos representam as duas etapas do método de resolução das equações.

Nesse livro, al-Khwarizmi ponderou sobre soluções das equações de primeiro e segundo graus de forma retórica, sem o emprego de símbolos. Como exemplo, temos: **Um quadrado é igual a cinco raízes. A raiz do quadrado então é 5, e 25 forma o seu quadrado que, é claro, é igual a 5 de suas raízes.** Neste exemplo, temos a equação $x^2 = 5x$, cuja raiz é $x = 5$; logo $x^2 = 25$ (MOL, 2013, p. 67).

Al-Khwarizmi possuía um vocabulário para denominar termos que aparecessem no problema, em especial os modos sobre os quais o número aparecia: a raiz, o quadrado e o número simples. Ele utilizava a palavra *Mal* para denominar o quadrado de uma quantidade desconhecida; *Adad* era um número qualquer, a quantidade conhecida; a raiz era designada pela palavra *Jidhr* e também era chamada de "coisa" (*shay*). Essas duas palavras também eram usadas para denominar o que hoje conhecemos por **incógnita**. Roque reforça que o termo **raiz** era usado para expressar uma quantidade desconhecida, e está intimamente relacionado com o fato de o quadrado dessa quantidade também ser uma **incógnita**, expressa pela palavra *Mal* (ROQUE, 2012, p. 221).

Roque (2012, p. 222) ainda mostra que a palavra **coisa** também era utilizada para enfatizar a condição da **incógnita**, já que este vocábulo, em árabe, significa "indefinição". Desse modo, como o cálculo abordado por Al-Khwarizmi era formal e a incógnita simbolizava objetos de natureza qualquer, havia uma preocupação para que esse cálculo pudesse ser aplicado tanto aos números quanto às grandezas geométricas. Isto foi fundamental para a origem de um domínio: a Álgebra, que não estava presente nem na aritmética nem na geometria. Logo, podemos dizer que a Álgebra é uma invenção árabe.

Al-Khwarizmi também escreveu o livro *Kitab al-jami wa'l tafriq bi hisabal hindi,* Livro sobre o método hindu de Adição e Subtração. Nesta obra, ele buscava popularizar o uso do sistema de numeração decimal posicional hindu e as operações fundamentais, incluindo a multiplicação e a divisão. Com isso, esse sistema passou a ser ensinado nas escolas e utilizado pelas pessoas em geral, especialmente os comerciantes. As palavras *algarismo* e *algoritmo* passaram a ser utilizadas. Assim, as obras de al-Khwarizmi tiveram grande influência na Matemática europeia os últimos séculos da Idade Média, o que foi fundamental para a Matemática dos dias de hoje.

Roque (2012, p. 227) ressalta que

> As práticas algébricas dos árabes possuem conexão com os métodos babilônicos e indianos, porém é difícil encontrar evidências que testemunhem influências diretas dessas culturas. Antes mesmo dos tempos islâmicos, tais tradições já haviam se misturado e, a partir do século IX, a síntese islâmica foi responsável pela sistematização das práticas. Aos poucos, a *al-jabr* e a *al-muqabala* foram se tornando uma ciência. Para empregar os algoritmos de resolução de equações, a partir do século XII matemáticos árabes passaram a abreviá-los por símbolos, sobretudo no Magreb. Foi se estabelecendo, assim, uma forma aproximadamente simbólica para exprimir essa técnica.

Portanto, Al-Khwarizmi estabeleceu técnicas de resolução que, ao serem traduzidas para a notação simbólica atual, são equivalentes à fórmula de resolução de equações do segundo grau. No entanto, é importante dizer que para esta fórmula existir, é preciso representar simbolicamente as incógnitas e operaloes contidas na equação, e esta equação do segundo grau contém todas as parcelas possíveis e seus coeficientes indeterminados, sendo que estas etapas foram obtidas depois de várias pesquisas. Todavia, Roque (2012, p. 228) reitera que “nem Bhaskara, nem outro matemático indiano, nem Al-Khwarizmi, nem outro árabe qualquer inventou a fórmula para a resolução da equação de segundo grau, apesar de todos eles saberem resolver o análogo a uma equação desse tipo nos termos da matemática de seu tempo”. Para tanto, esta fórmula só pôde ser escrita após Viète introduzir simbolismo aos coeficientes.

Neste sentido, Viète (1540-1603) introduziu uma representação padrão no estudo da resolução de equações: as incógnitas eram representadas pelas vogais do nosso alfabeto, e os coeficientes pelas consoantes, todas maiúsculas. Vale observar que, neste contexto, **incógnita** é uma quantidade desconhecidas, que será determinadas a partir das restrições dadas na equação, e **coeficientes** são quantidades conhecidas genéricas, que estão indeterminadas na expressão de uma equação. Roque (2012, p. 246) nos diz que essa notação de Viète deveria representar uma generalização dos métodos algébricos, mas a Álgebra ainda não era vista como uma disciplina nem os métodos algébricos podiam ser generalizados pois eram utilizados para resolver vários tios de problemas.

Portanto, Roque (2012) nos auxiliou neste trabalho trazendo essa visão mais crítica acerca da história da Álgebra e o surgimento das equações, o que contribuiu para um melhor entendimento sobre esse tema.

2 - A IMPORTÂNCIA DA ÁLGEBRA NA MATEMÁTICA DO ENSINO FUNDAMENTAL

Sabemos que o estudo da Álgebra é obrigatório e necessário no Ensino Fundamental do 6º ao 9º ano, e com isso o conhecimento e a resolução de Equações também se fazem indispensáveis para o desenvolvimento deste estudo. Então, inicialmente mostraremos o papel da BNCC nesse processo de ensino e aprendizagem dos alunos, através das competências e habilidades estabelecidas para a etapa do Ensino Fundamental em questão, bem como a relevância do pensamento algébrico neste contexto.

2.1 – O PAPEL DA BNCC

Assim, a fim de assegurar os direitos de aprendizagem e desenvolvimento dos alunos, foi elaborado um documento de caráter normativo, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018), que "está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN)" (BRASIL, 2018, p. 07). E para que sejam asseguradas essas aprendizagens necessárias aos alunos, a BNCC busca que estes desenvolvam as competências gerais estabelecidas pelo documento.

A BNCC define como **competência** "a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho" (BRASIL, 2018, p. 08).

Sendo assim, a BNCC apresenta as seguintes competências da Educação Básica (BRASIL, 2018, p. 09-10):

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Neste contexto, a BNCC orienta que as decisões pedagógicas estejam relacionadas ao desenvolvimento das competências. Desse modo, as competências devem oferecer “referências para o fortalecimento de ações que assegurem as aprendizagens essenciais definidas na BNCC”, indicando o que os alunos devem “saber” e o que devem “saber fazer” (BRASIL, 2018, p. 13).

Vale destacar que essas competências estabelecidas pela BNCC se articulam na construção de conhecimentos nas três esferas da Educação Básica: Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. Na imagem abaixo, temos como está estruturada a BNCC:

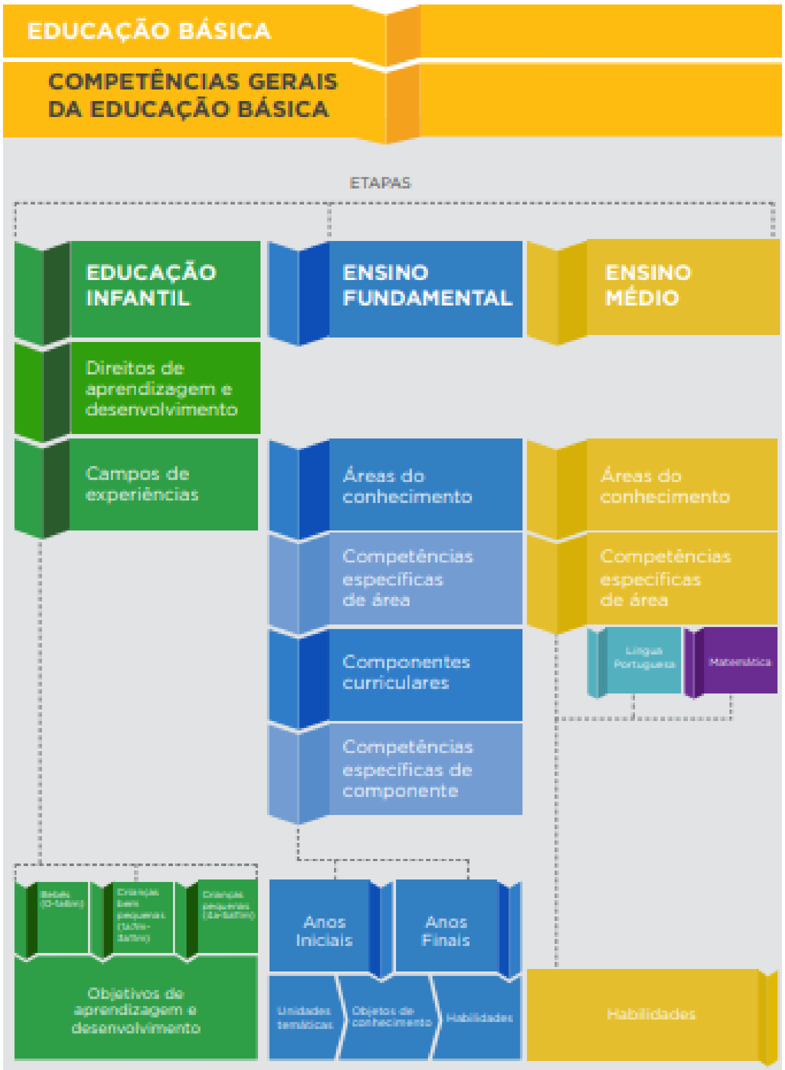

Imagem nº 4. Estrutura Geral da BNCC

Fonte: BRASIL, 2018, p. 24

Neste sentido, o Ensino Fundamental está dividido na BNCC em cinco áreas do conhecimento: **Linguagens, Matemática, Ciências Humanas, Ciências de Natureza** e **Ensino Religioso**. Essas áreas estabelecem a relação entre os conhecimentos e saberes dos componentes curriculares. Cada área do conhecimento apresenta competências específicas, que mostram como as dez competências gerais se manifestam em cada área. E para assegurar o desenvolvimento das competências especificas das áreas, cada componente curricular apresenta um conjunto de **habilidades**, que estão relacionados aos objetos de conhecimento, os quais são organizados em unidades temáticas.

Na BNCC, “as habilidades expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares” (BRASIL, 2018, p. 29), e são descritas conforme uma dada estrutura.

Neste trabalho, iremos enfatizar como se dá o desenvolvimento das competências e habilidades em Matemática, nos anos finais do Ensino Fundamental, especialmente no sétimo ano, pois é especialmente nesta etapa do Ensino Fundamental que se amplia o estudo da Álgebra, em que o aluno deverá reconhecer e interpretar problemas por meio das equações e conhecer as regras para resolvê-las, generalizar padrões e estudar a variação de grandezas.

2.2 – AS COMPETÊNCIAS E HABILIDADES NA MATEMÁTICA DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

O conhecimento matemático é algo necessário à Educação Básica, seja por sua aplicação a temas contemporâneos, ou por sua potencialidade na formação de cidadãos críticos e responsáveis. Desta forma, a Matemática no Ensino Fundamental “precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas” (BRASIL, 2018, p. 265). Assim, espera-se que estes alunos utilizem a Matemática para resolver problemas utilizando os conceitos e procedimentos necessários ao contexto.

O Ensino Fundamental também é responsável em desenvolver o **letramento matemático**, que tem por definição “as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas” (BRASIL, 2018, p. 266). Com isso, busca-se que os alunos reconheçam os conhecimentos matemáticos como essenciais para a compreensão de mundo, através do desenvolvimento do raciocínio logico e crítico.

Para tanto, a Matemática deve garantir aos alunos que desenvolvam também as **competências específicas** para o Ensino Fundamental, que são:

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.

2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. (BRASIL, 2018, p. 267)

A BNCC indica cinco **unidades temáticas** que orientam a formulação das habilidades a serem desenvolvidas no Ensino Fundamental: **Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas** e **Probabilidade e estatística**, e estabelece um conjunto de **ideias fundamentais**, articuladas entre si: equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação.

Na unidade temática **Álgebra**, a finalidade é desenvolver o **pensamento algébrico**, “que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos” (BRASIL, 2018, p. 270). Para isso, os alunos precisam identificar as regularidades e padrões de sequencias numéricas, estabelecer generalizações, analisar a relação de interdependência entres as grandezas, as representações gráficas e simbólicas e, por fim, resolver equações e inequações utilizando os procedimentos necessários.

Assim, no estudo da Álgebra, nos anos finais do Ensino Fundamental, “os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas” (BRASIL, 2018, p. 270-271). Desta forma, os alunos precisam entender a relação entre variável e função, e incógnita e equação.

Segundo a BNCC, para desenvolver as habilidades estabelecidas par os anos finais do Ensino Fundamental, é necessário que as experiências e conhecimentos adquiridos pelos alunos nas suas vivências sejam consideradas, a partir de situações onde estes possam relacionar os aspectos qualitativos e quantitativos da sua realidade com ideias mais complexas. Com isso, essas situações devem desenvolver também as ideias fundamentais da matemática.

Vale destacar que a aprendizagem em Matemática nesta etapa do ensino está relacionada aos significados dos objetos matemáticos, onde os alunos estabeleçam relações desses objetos com o cotidiano, temas matemáticos e componentes curriculares. Daí a importância da relação entre a linguagem e a linguagem simbólica.

A BNCC traz para cada ano do Ensino Fundamental as competências e habilidades estabelecidas para cada unidade temática. Neste trabalho, enfatizaremos a unidade temática Álgebra. Assim, os objetos de conhecimentos e habilidades para o sétimo do Ensino Fundamental estão dispostas da seguinte forma:

UNIDADES TEMÁTICAS	**OBJETOS DE CONHECIMENTO**	**HABILIDADES**
		(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre

Álgebra	Linguagem algébrica: variável e incógnita	duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita. (EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura. (EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
	Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica	(EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.
	Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais	(EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.
	Equações polinomiais do 1º grau	(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade

Tabela 1. Unidade temática Álgebra, no sétimo ano do Ensino Fundamental

Podemos observar que nos objetos de conhecimento da Álgebra, o uso das letras assume um papel diferente, o que será explicado a partir de algumas Dissertações de Mestrado, como Freitas (2002), Grecco (2008), Christo (2006), Silva (2012) e a obra de Caraça (1951).

Freitas (2002, p. 10), em sua Dissertação de Mestrado, nos traz esta ideia de que a Álgebra é muitas vezes chamada de "aritmética generalizada", por sugerir que operações aritméticas podem ser **generalizadas** através de expressões algébricas. As expressões *2n* e *2n+1*, por exemplo, são generalizações de como representar números pares ou ímpares. O mesmo ocorre para estabelecer relações, realizar cálculos e generalizar resultados.

Usiskin (1995 *apud* GRECCO, 2008, p. 27) reforça dizendo que essa concepção é muito utilizada em modelagem matemática, pois as letras são utilizadas como instrumentos para descrever situações, isto é, tem a função de traduzir e generalizar.

Freitas (2002, p. 18) também nos mostra a relação da Álgebra com o *estudo das funções,* tratando as letras como **variáveis**. Por exemplo, em $y = x + 1$, x não é mais uma incógnita, e sim uma variável, pois a cada valor de x, há um novo valor para y, o que retrata a ideia de função, que é a relação entre as variáveis.

Segundo R. Courant e H. Robbins (2000 *apud* CHRISTO, 2006, p. 27-28), chamamos um elemento (ente) matemático de *variável* quando está dentro de um domínio S. Assim, p. ex., sendo S um conjunto, a variável X percorre tal conjunto, nos dando a liberdade de identificar X como qualquer elemento do conjunto S.

Caraça (1951, p. 127) também nos traz o seu conceito de variável: "Seja (E) um conjunto qualquer de números, conjunto finito ou infinito, e convencionemos representar qualquer dos seus elementos por um símbolo, por ex.: *x. A este símbolo, representativo de qualquer dos elementos do conjunto (E), chamamos de variável*".

Assim, na definição de função, ele nos diz ainda que: "Sejam *x* e *y* duas variáveis representativas de conjuntos de números; diz-se que *y* é função de *x* e escreve-se $y = f(x)$ se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido $x \rightarrow y$. A *x* chama-se variável independente e a *y* variável dependente" (p. 129).

Já Kieran (1994 *apud* FREITAS, 2002, p. 15) explica que na Álgebra como procedimento para *resolver equações*, deve se pensar nos símbolos operatórios de uma maneira além da utilizada na aritmética. Na equação $2x + 3 = 10$, p. ex., o símbolo de adição não significa a soma dos termos numéricos do 1º membro (2 e 3); indica que somar 3 ao dobro do número *x*, o resultado deve ser 10. Assim, usando a *operação inversa*, o símbolo de adição quer dizer que devemos *subtrair* 3 de 10.

Usiskin (1994 *apud* FREITAS, 2002, p. 16) mostra uma relação da Álgebra com a simplificação dos procedimentos para resolver uma equação. Neste sentido, as variáveis são **incógnitas** cujos valores devem ser descobertos. Após isso, deve-se substituir tais valores na incógnita da equação para verificar o resultado. Por exemplo, na equação $2x – 3 = 5$, devemos *somar* 3 a ambos os membros da equação e encontrar uma equação equivalente (*2x = 8*), e por conseguinte, obter *x = 4*. Logo, substituindo a incógnita pelo valor 4, verifica-se que a sentença é verdadeira.

Tomando outro exemplo do uso da letra como incógnita, temos: “Uma caixa em formato de prisma retangular tem 4,5 cm de largura e 3 cm de altura e seu volume é de 81 cm^3. Qual é seu comprimento?” (URSINI *et al.*, 2005 *apud* SILVA, 2012, p. 27). Neste caso, podemos dizer que “a incógnita não é uma variável, pois representa um valor fixo, determinado, que não está sujeito a variação” (p. 28). Ou seja, após reconhecer e identificar o comprimento da caixa como um valor desconhecido mas que pode ser determinado, a incógnita, esta deve ser simbolizada por uma letra *x*, e assim fazer as manipulações necessárias na equação, através das operações aritméticas, encontrando o valor da incógnita.

Na chamada *álgebra estrutural*, que está diretamente ligada ao **cálculo algébrico**, a Álgebra é considerada como o estudo das estruturas segundo as propriedades que se atribuem às operações com números reais e polinômios (GRECCO, 2008, p. 28). Assim, deve-se observar a construção do conhecimento do aluno sobre o uso das letras, através do estudo da sintaxe. Desta forma, o aluno precisa entender como se dá esse processo de construção da sintaxe, bem como o uso da linguagem algébrica, para que possa aprender sobre as abordagens da Álgebra e, assim, resolver situações-problema deste conteúdo. Neste sentido, vamos explicar um pouco sobre a dualidade entre a linguagem algébrica e o pensamento algébrico.

2.3 – PENSAMENTO ALGÉBRICO X LINGUAGEM ALGÉBRICA

Para melhor entender sobre linguagem algébrica e pensamento algébrico, vamos utilizar os textos de Ponte, Branco e Matos (2009), Grecco (2008), Silva (2012) e Oliveira e Laudares (s.d.).

Para Ponte, Branco e Matos (2009, p. 08), a Álgebra faz uso de uma linguagem própria, a *linguagem algébrica*, o que “cria a possibilidade de distanciamento em relação aos elementos semânticos que os símbolos representam. Deste modo, a simbologia algébrica e a respectiva sintaxe ganham vida própria e tornam-se poderosas ferramentas para a resolução de problemas”. Isto implica dizer que a linguagem algébrica é fundamental para que se possa entender as regras e procedimentos para resolver situações-problemas na Álgebra.

Além disso, os autores se valem das ideias de Freudenthal (1983 *apud* PONTE, BRANCO e MATOS, 2009, p. 09), o qual diz que a linguagem algébrica é um conjunto com várias regras de sintaxe, que auxiliam no desenvolvimento de uma ação, e ainda compara esta linguagem com a linguagem corrente, reforçando que podem surgir, o decorrer da aprendizagem, interpretações incorretas da linguagem algébrica.

Sobre o pensamento algébrico, Kaput (2008 *apud* PONTE, BRANCO e MATOS, 2009, p. 09) define como “algo que se manifesta quando, através de conjecturas e argumentos, se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas através de linguagens cada vez mais formais”. Os autores reforçam dizendo que o objetivo da Álgebra nas series iniciais é desenvolver nos alunos o pensamento algébrico, tendo em vista a capacidade da manipular símbolos e lidar com expressões algébricas, equações etc.

Já Grecco (2008, p. 18), traz a ideia que “o pensamento algébrico é um marco fundamental no desenvolvimento cognitivo do educando”, pois permite que ele realize abstrações e generalizações das representações algébricas.

Neste contexto, Oliveira e Laudares (s.d., p. 06) reiteram que “o pensamento algébrico está associado à capacidade de estabelecer generalizações e relações, interpretar situações e resolver problemas”, onde o papel do professor é essencial para que o aluno desenvolva essa relação entre Aritmética e Álgebra, sendo esta uma continuidade da primeira. Para os autores, no pensamento algébrico se deve associar os conhecimentos trazidos do dia a dia do aluno aos conceitos adquiridos em sala de aula (p. 05).

Silva (2012, p. 23), baseando-se no texto de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), diz que o pensamento algébrico se reduz à linguagem algébrica, isto é, as concepções da Educação Algébrica apresentadas pelos autores “partem de uma linguagem simbólica já constituída e reduzem o ensino e aprendizagem da Álgebra ao transformismo algébrico”.

Para tanto, os autores ainda destacam que o pensamento algébrico se manifesta e desenvolve através da linguagem algébrica. Por outro lado, estes autores ponderam que a linguagem é a expressão de um pensamento, o que implica dizer que não há uma *subordinação* entre pensamento e linguagem, e sim uma **relação dialética**.

3 – A INCÓGNITA NA EQUAÇÃO DO 1º GRAU

Inicialmente, vamos rever as habilidades definidas pela BNCC quanto ao ensino de Álgebra no sétimo ano do Ensino Fundamental (BRASIL, 2018, p. 307):

(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.

(EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.

(EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.

Neste sentido, é necessário entender a linguagem algébrica, e assim diferenciar a variável da incógnita, bem como compreender a generalização dada nas sequências numéricas a fim de expressar as regularidades corretamente.

Assim, quando se trata de Equações, vale lembrar que surge uma ruptura entre a Matemática *concreta* e a Aritmética, pois a partir deste conteúdo algébrico, o aluno passa a conhecer novas expressões, novos símbolos e novas regras de manipulação para resolver tais equações (PONTE, 2004 *apud* BARBEIRO, 2012, p. 6). Neste sentido, cabe ao professor propor ao aluno situações onde este precise construir noções algébricas, estabelecer relações e não apenas resolver expressões e equações de forma mecânica; afinal, nos anos finais do Ensino Fundamental os professores dão ênfase para estes conteúdos da Álgebra, o que não o isenta de realizar um trabalho articulado entre as competências e habilidades propostas pela BNCC.

3.1 – EQUAÇÕES

Para determinar o que é Equação, vamos utilizar alguns textos onde os autores nos mostram a importância deste assunto no conhecimento e ensino da Álgebra.

3.1.1. - Definição

Ponte, Branco e Matos, na obra Álgebra no Ensino Básico (2009), destacam que o ensino de Equações deve "apoiar o desenvolvimento do significado das expressões algébricas e da respectiva terminologia – monômio, polinômio, binômio, coeficiente numérico, parte literal, etc. Particularmente importantes são as noções de "solução de uma equação" e "equações equivalentes"." (PONTE, BRANCO e MATOS, 2009, p. 94). Desse modo, cabe ao aluno saber identificar cada modelo de expressões algébricas, resolver corretamente as equações e entender que equações só são equivalentes se, e somente se, tiverem a mesma solução.

Os autores afirmam que "as equações são uma ferramenta fundamental para resolver problemas" (PONTE, BRANCO e MATOS, 2009, p. 106), pois os problemas devem estar presentes durante todo o processo de ensino e aprendizagem de Equações no Ensino Fundamental, especialmente a partir do terceiro ciclo, quando se inicia a aprendizagem das resoluções de Equações do 1º Grau.

Eles também trazem várias definições sobre Equação. Ela pode ser vista como "uma igualdade entre duas expressões, em que alguns valores são desconhecidos" (PONTE, BRANCO e MATOS, 2009, p. 93). Porém, uma igualdade entre expressões não é uma equação se não houver um valor desconhecido. Ainda se pode dizer que "uma equação é uma igualdade entre duas expressões, em que alguns valores são desconhecidos e que só é satisfeita para certos valores da incógnita” (PONTE, BRANCO e MATOS, 2009, p. 94).

Neste sentido, o sinal de igualdade assume diversos significados: pode ser um operador, tanto em situações aritméticas como algébricas, ou indicar uma equivalências, como podemos observar nas expressões algébricas e equações (PONTE, BRANCO e MATOS, 2009, p. 22).

Lima (2007), em sua Tese de Doutorado, reforça a ideia que o aluno precisa conhecer a estrutura de uma equação e compreenda os símbolos utilizados pra representá-la assim como na sua manipulação, pois os símbolos tem um papel fundamental para que se tenha uma equação (LIMA, 2007, p. 27). O aluno precisa compreender que o sinal de igual, p. ex., representa a igualdade entre os membros e que as ações realizadas no 1º membro da equação devem ser realizadas também no outro membro.

> A falta de entendimento de que um membro da equação é igual ao outro e de que é necessário manter essa igualdade a cada passo da resolução podem acarretar que de alguns passos não resulte uma equação equivalente à inicial, o que faria com que as raízes obtidas não fossem as procuradas. Desta forma, há a necessidade de buscar saber o que os alunos entendem sobre equações equivalentes (LIMA, 2007, p. 28-29).

Lima reafirma sobre a importância e a necessidade de se entender a estrutura interna de uma equação, tendo em vista que o ensino de Equação muitas vezes está pautado apenas na apresentação de processos mecânicos para resolvê-las (LIMA, 2007, p. 26).

3.2 – A INCÓGNITA NA EQUAÇÃO DO 1º GRAU

O uso de letras como *incógnita* na Equação do 1º Grau é primordial para o conhecimento da equação e o entendimento dos procedimentos da resolução.

Usinkin (1995 *apud* GRECCO, 2008, p.28), mostra que no processo de tradução de um problema para a linguagem algébrica, o aluno precisa encontrar regras e procedimentos que simplifiquem ou resolvam a expressão ou equação apresentada. Deste modo, a letra funciona com uma incógnita.

Ursini *et al.* (2005 *apud* SILVA, 2012, p. 52) reitera que ao utilizar a variável como i*ncógnita*, é possível determinar o valor desconhecido, a partir dos dados apresentados em determinadas situações. Ou seja, o valor da incógnita em cada equação pode ser definido de acordo com as informações apresentadas na situação-problema.

Entretanto, o aluno por muitas vezes não consegue distinguir a diferença entre o uso da letras como *variáveis* ou como *incógnitas*, o que é primordial para um melhor entendimento das equações e do pensamento algébrico. Assim, o aluno precisa entender que "as variáveis podem se comportar como incógnitas quando representam valores fixos, determináveis pelas condições fornecidas pela equação" (OLIVEIRA e LAUDARES, s.d., p. 5).

Deste modo, o uso das letras como *incógnita*, nas Equações do 1º Grau, servem para identificar os valores fixos na Equação, mas que podem ser determinados, visto que a partir das operações com a incógnita se obtém o valor que torna a Equação uma sentença verdadeira.

3.3 – RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU

O processo de resolução de Equações do 1º grau se dá a partir de várias abordagens, de diversos autores. Para tanto, o aluno deve ter conhecimento e domínio das regras de resolução.

Freitas (2002, p.15) afirma que, segundo a obra de Kieran (1994), a Álgebra enquanto procedimento para resolver Equações, pode apresentar duas abordagens para resolvê-las: a aritmética e a algébrica. Na abordagem aritmética, o foco é nas operações dadas na Equação, utilizando a resolução por tentativa e erro. Na abordagem algébrica, a resolução se dá pela transposição de termos de um membro ao outro, pois o foco é nas operações inversas às apresentadas na Equação.

Neste contexto, Kieran (1992 *apud* BARBEIRO, 2012, p. 6-7) identificou alguns métodos de resolução de Equações utilizados pelos alunos:

(i) Uso de factos numéricos, por exemplo, na resolução da equação $5 + n = 8$ os alunos usam conhecimentos anteriores da adição, $5 + 3 = 8$;

(ii) Uso de técnicas de contagem, permitem compreender que, considerando a equação anterior, para obter 8, e partindo do número 5, são contados três números inteiros;

(iii) Cobertura (cover–up), por exemplo, na equação $6x = 2x + 4$, 4 tem que ser equivalente a $4x$, uma vez que $6x = 2x + 4x$. Sendo assim, se $4x = 4$, x é igual a 1;

(iv) Desfazer (undoing), por exemplo, no caso da equação $2x + 4 = 18$, tendo em conta as operações do 1º membro, para resolver a equação, "desfaz-se" cada operação, usando a ordem da direita para a esquerda, ou seja, temos primeiro a adição de 4, logo começar-se-ia por subtrair 4 a 18, de seguida, surge a multiplicação por 2, pelo que, o resultado obtido anteriormente seria dividido por 2;

(v) Substituição por tentativa e erro, substitui-se o valor da incógnita por vários valores, até encontrar o valor que permita obter uma proposição verdadeira. Por exemplo, para resolver a equação, $2x + 5 = 13$, testam-se diversos valores, como 2, 6 e depois 4, chegando à conclusão que só o 4 poderá ser solução da equação;

(vi) Transposição, que consiste em deslocar termos de um membro para o outro, trocando o sinal;

(vii) Realização da mesma operação em ambos os membros, por aplicação dos princípios de equivalência de equações.

Os primeiros métodos são considerados informais, sendo que os dois últimos exigem um grau de formalização maior. No que tange à transposição, Kieran ressalta que o aluno tende a aplicar mecanicamente esta regra: muda de membro → muda de sinal, o que não favorece a Equação enquanto objeto matemático.

Ponte, Branco e Matos (2009, p. 95) parte dos princípios de equivalência para a resolução das Equações, pois é uma abordagem que facilita este processo de resolução. Na equivalência, as operações devem ser realizadas em ambos os membros da Equação, isto é, somar ou subtrair a mesma quantidade de ambos os membros, ou ainda, multiplicar ou dividir os dois membros por um mesmo número, diferente de zero. Porém, segundo os autores, esse princípio de equivalência deixou de ser enunciado, ou é enunciado como regras práticas, sem justificativa dessas regras. No entanto, vale lembrar que o aluno precisa entender essas regras práticas e interiorizá-las, para ter êxito na sua aprendizagem sobre Equações.

4 – A ABORDAGEM DA INCÓGNITA NOS LIVROS DIDÁTICOS DE SÉTIMO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Neste capítulo, iremos analisar alguns livros didáticos de 7º ano do Ensino Fundamental, a fim de verificar como a Incógnita é abordada por eles quando se trata de Equações. Neste contexto, analisaremos os seguintes tópicos:

- competências e habilidades definidas pela BNCC;
- definição de Equação;
- definição de Incógnita;
- métodos de resolução das Equações.

Assim, para este trabalho, escolhemos os seguintes livros de 7º ano do Ensino Fundamental: **Geração Alpha Matemática**, de Carlos Oliveira e Felipe Fugita (2018), **Matemática: ideias e desafios**, de Iracema Mori e Dulce Onaga (2016), **Matemática Bianchini**, de Edwaldo Bianchini (2018) e **A Conquista da Matemática**, de Giovanni Júnior e Benedicto Castrucci (2018).

4.1 – ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

O primeiro livro a ser analisado é a **Geração Alpha Matemática**, de Carlos N. C. de Oliveira e Felipe Fugita (2018), e é de uma coleção de quatro volumes, divididos em unidades temáticas, com capítulos relacionados a elas.

No início de cada unidade há o tópico "Primeiras Ideias", que é uma iniciação ao tema, sempre com uma imagem, e através de perguntas relacionadas ao tema proposto. Cada unidade apresenta dois ou três capítulos. Ao final de cada capítulo, há a seção "Diversificando", que abrange os conceitos trabalhados. E no final das unidades, pode haver alguns tópicos extra, como: "Ampliando Horizontes", que traz temas relacionados à educação financeira; "Investigar", contendo metodologias de pesquisa como entrevistas, observações de campo etc.; "Resolvendo Problemas", onde o aluno pode desenvolver sua compreensão e estratégias de resolução aprendidas na unidade; e "Atividades Integradas", que integram os assuntos da unidade.

Sendo assim, este livro contém 8 unidades, sendo que a Unidade 4 tem como temática "Introdução à Álgebra", e os objetos de conhecimento a serem desenvolvidos, de acordo com a BNCC, são: *Linguagem algébrica: variável e incógnita*, *Equivalência de expressões algébricas: identificação de regularidades de uma sequência numérica* e *Equações polinomiais do 1º grau*, e as habilidades relacionadas a eles: EF07MA13, EF07MA14, EF07MA15, EF07MA16 e EF07MA18. A Unidade também está dividida em dois capítulos: *Expressões algébricas* e *Equações*.

O capítulo 1 desta unidade inicia com uma situação-problema que introduz o conceito de expressões algébricas. Também traz exemplos, os termos dessa expressão e como se dá a simplificação de uma expressão algébrica quando há termos semelhantes. Apresenta ainda sequências numéricas, usando letras para representar padrões, mostrar regularidades.

No capítulo 2, também inicia com uma situação que conduz à definição de Equação como "sentenças matemáticas expressas por uma igualdade que contém pelo menos uma letra" (OLIVEIRA e FUGITA, 2018, p. 153). E essa letra que aparece na equação é chamada de *incógnita*. Também traz a definição de solução ou raiz da equação: "é todo número pelo qual a incógnita é substituída e que torna a sentença verdadeira" (OLIVEIRA e FUGITA, 2018, p. 154). Ainda define conjunto universo e conjunto solução de uma equação, equações equivalentes, mostrando os princípios de equivalência das igualdades: o aditivo e o multiplicativo. Este capítulo traz ainda Equações do 1º Grau com uma incógnita e com duas incógnitas, bem como a resolução delas. Define Equações do 1º grau com uma incógnita como "qualquer equação que pode ser escrita na forma $ax + b = 0$, em que x é a incógnita e os coeficientes a e b são números racionais, com $a \neq 0$" (OLIVEIRA e FUGITA, 2018, p. 158). A resolução dessas Equações é feita a partir das equações equivalentes e os princípios de equivalência. Nas situações-problemas, os autores mostram o seguinte passo a passo (OLIVEIRA e FUGITA, 2018, p. 162):

1- Identificar o valor desconhecido (incógnita) e montar a equação
2- Determinar as condições para a incógnita (o conjunto universo)
3- Resolver a equação
4- Verificar se o resultado obtido confere com a situação proposta

Por fim, na Equação com duas incógnitas, o livro não apresenta uma definição como nas outras, e no que se refere à solução, explica que é preciso analisar o conjunto universo, atribuir um valor para umas das incógnitas e determinar o valor da outra incógnita.

Deste modo, analisando os itens definidos no início, temos:

Itens para análise do livro didático	**Resultados**
Competências e habilidades estabelecidas pela BNCC	São desenvolvidas na Unidade
Definição de equação	Apresentada apenas na definição de equação com uma incógnita
Definição de incógnita	Apresenta a definição de maneira bem simples e concisa
Métodos de resolução da equação	- Tentativa e erro - Princípios de equivalência - Transposição de termos de um membro ao outro

Tabela 2 – Análise do livro didático 1

O segundo livro didático analisado é **Matemática: ideias e desafios**, de Iracema Mori e Dulce Satiko Onaga (2016). Este livro faz parte de uma coleção do Ensino Fundamental, com quatro volumes. Por ser de uma data anterior, o livro não faz referências às competências e habilidades pela BNCC.

É dividido em unidades, de temas diferentes, e que estão divididas em capítulos relacionados a cada tema. No início de cada unidade, tem a seção "O que você já sabe?", que busca saber os conhecimentos prévios trazidos pelos alunos e que possam servir para este assunto que será trabalhado. No decorrer dos capítulos, o livro traz várias seções como "Para refletir e responder", com situações-problemas que auxiliam no desenvolvimento dos conteúdos; "Troquem ideias e resolvam", que possibilita uma discussão em grupo e troca de experiência entre os alunos; "Investigue e explique", que traz situações de natureza investigativa; "Desafio", com problemas de cálculo mental, brincadeiras e jogos; "Leitura", com textos de diversas áreas do conhecimento e informações históricas da matemática; e no fim das unidades, traz uma revisão cumulativa e testes.

Assim, este livro está dividido em 11 unidades, sendo que a Unidade 6 tem como tema "Equações" e os capítulos *O uso de letras em Matemática*, *Equações do 1º grau com uma incógnita* e *Equações e resolução de problemas.*

O capítulo 1 "O uso de letras em Matemática" inicia com uma situação problema, e a partir dela define o que é expressão algébrica: "uma expressão que envolve números, letras e operações indicadas entre eles" (MORI e ONAGA, 2016, p. 145), onde as letras são as *variáveis* da expressão algébrica, e a elas podem ser atribuídos valores numéricos racionais quaisquer.

O capítulo 2 "Equações de 1º grau com uma incógnita" inicia também com um problema, onde diz que este pode ser solucionado a partir de uma Equação, trabalhando com letras como se fossem números. Assim, define que a letra que representa o número desconhecido é a *incógnita* da Equação. Já a Equação é "uma sentença matemática que expressa uma igualdade entre duas expressões algébricas" (MORI e ONAGA, 2016, p. 149). Porém, o texto não traz a definição de equação de 1º grau com uma incógnita, definida como: $ax + b = 0$. No que se refere à solução de uma equação, diz que o valor atribuído à incógnita, e que torna a equação uma sentença verdadeira, é chamado de *raiz* ou *solução* da equação. Na resolução da equação, podem ser aplicadas as propriedades da igualdade:

- adicionar um mesmo número aos dois membros da equação;
- subtrair um mesmo número dos dois membros da equação;
- multiplicar os dois membros da equação por um mesmo número;

- dividir os dois membros da equação por um mesmo número diferente de zero.

Esses são os chamados princípios da equivalência, porém não são explicados no texto. Ainda traz um exemplo usando como método de resolução “isolar o *x*”, mas o texto também não traz explicações sobre.

No capítulo 3, são explorados primeiramente a resolução de problemas por meio das equações. Entretanto não se aprofunda no passo a passo da resolução: a partir do problema, se deve equacioná-lo, e resolver. Ainda traz no capítulo *Equações com denominadores* e *Equações, geometria e* medidas, com apenas um exemplo cada.

Desta forma, temos a seguinte tabela:

Itens para análise do livro didático	**Resultados**
Competências e habilidades estabelecidas pela BNCC	Não são desenvolvidas no livro
Definição de equação	Apresentada apenas na definição inicial de equação, não sendo mais aprofundada
Definição de incógnita	Apresenta a definição de maneira bem simples e concisa
Métodos de resolução da equação	- Tentativa e erro - Princípios de equivalência - Transposição de termos de um membro ao outro

Tabela 3 – Análise do livro didático 2

O terceiro livro didático utilizado para análise é o **Matemática Bianchini**, de Edwaldo Bianchini (2018), que também faz parte de uma coleção de quatro volumes do Ensino Fundamental, onde cada livro está dividido em 12 capítulos, sendo intercalados com as seções especiais. Assim, no início de cada capítulo, há uma imagem e um texto motivadores sobre o tema, e no final dos capítulos podem ter as seções “Para saber mais”, que busca aprofundar algum tópico do assunto; “Trabalhando a informação”, que traz atividades interdisciplinares; e “Diversificando”, que traz situações problemas envolvendo os assuntos trabalhados no capítulo, contribuindo assim para o desenvolvimento das competências estabelecidas pela BNCC.

Então, este livro está dividido em 12 capítulos, sendo o capítulo 5 traz como tema *Equações*. Neste sentido, o livro busca desenvolver, no decorrer do capítulo, os objetos de conhecimento propostos pela BNCC que são *Linguagem algébrica: variável e incógnita* e *Equações polinomiais do 1º grau*, e as seguintes habilidades: EF09MA13, EF09MA14, EF09MA15 e EF09MA18, para a unidade temática Álgebra.

O capítulo inicia com uma imagem, onde o autor retrata a relação de dependência entre grandezas, e que pode ser obtida por meio de uma equação. O primeiro tópico "Um pouco de História" fala de antigos textos matemáticos, que trazem problemas com a função de ensinar Matemática. O segundo tópico "Números representados por letras" inicia com situações onde as expressões escritas na linguagem comum podem ser escritas na linguagem simbólica da Matemática. E também mostra a seguinte definição para a Álgebra: "é a parte da Matemática que trabalha com grandezas cujos valores variam (**variáveis**) ou que são desconhecidos (**incógnitas**) e que são representados por símbolos - em geral, por letras" (BIANCHINI, 2018, p. 112). Nos exemplos que se seguem, podemos usar uma letra para representar um valor desconhecido:

a) O dobro de um número → $2 \cdot x$
b) O triplo de um número mais quatro → $3 \cdot x + 4$
c) A metade de um número menos um terço → $\frac{x}{2} - \frac{1}{3}$
d) Um número mais seus três quintos → $x + \frac{3}{5} \cdot x$
e) A soma de dois números inteiros consecutivos → $x + (x + 1)$

Imagem nº 6. Exemplos de expressões
Fonte: BIANCHINI, 2018, p. 113

Assim, a letra *x* pode ser qualquer número racional; logo a letra *x* é uma *variável*, ressaltando que o autor não trouxe uma definição para expressão algébrica. No tópico 3, "Valor numérico de uma expressão algébrica", o autor retoma o exemplo de abertura do capítulo, para explicar que quando trocamos as letras da expressão por números e efetuamos as operações, o número encontrado é chamado de *valor numérico* (BIANCHINI, 2018, p. 115), e apresenta mais exemplos sobre. O tópico 4, "Termos algébricos", define o que é coeficiente e parte literal nas expressões algébricas, termos semelhantes e simplificação de expressões algébricas.

No tópico 5, "Sentenças matemáticas e equações", o autor define sentenças como um conjunto de palavras com sentido completo; se houver número, é uma sentença matemática (BIANCHINI, 2018, p. 120). O autor define Equação como uma sentença matemática expressa por uma igualdade que apresenta letras representando números, que são chamadas de incógnitas (BIANCHINI, 2018, p. 121), e determina os primeiro e segundo membros da equação. No que se refere à raiz da equação, o autor diz que um número é a raiz da equação se, ao substituir a incógnita por ele, a sentença se torna verdadeira (BIANCHINI, 2018, p. 122), e é exemplificado a partir de tentativas. Para isso, o autor reforça que "para conseguir resolver uma equação, precisamos saber quais são os valores que a incógnita pode assumir e quais são os valores que a tornam verdadeira" (BIANCHINI, 2018, p. 123), o que caracteriza o conjunto universo da equação dada. O tópico 6 é "Equações do 1º grau com uma incógnita", mas não traz uma definição ampla sobre; mas fala de equações equivalentes: trazendo exemplos que levam à definição.

No tópico 7 "Resolução de equações", a mesma é feita transformando a equação em outra equivalente, através dos princípios de equivalência, até obter as soluções (BIANCHINI, 2018, p. 127), ou ainda, uma equação pode ser resolvida por tentativas. Também mostra a resolução de equações com termos semelhantes e com parênteses.

Assim, organizamos a seguinte tabela:

Itens para análise do livro didático	**Resultados**
Competências e habilidades estabelecidas pela BNCC	São desenvolvidas no capítulo
Definição de equação	Apresentada apenas na definição inicial de equação
Definição de incógnita	Apresenta a definição de maneira bem simples e concisa
Métodos de resolução da equação	- Tentativa e erro - Princípios de equivalência

Tabela 4 – Análise do livro didático 3

Por fim, o quarto e último livro a ser analisado é **A Conquista da Matemática**, de José Ruy Giovanni Júnior e Benedicto Castrucci (2018), que integra uma coleção de Ensino Fundamental, contendo quatro volumes. O livro está dividido em unidades temáticas, que estão divididos em capítulos relacionados ao tema. No início das unidades, apresenta uma introdução ao conteúdo que será trabalhado, através de textos ou imagens dentro de um contexto. No final de alguns capítulos, além de atividades, o autor apresenta vários tópicos que buscam ampliar o conhecimento obtido no estudo da unidade, como o "Por toda a parte", que com situações que conecta a Matemática com outras áreas do conhecimento; "Tratamento da informação", que traz tratamento e organização de dados; "Tecnologias", que trazem informações sobre ferramentas tecnológicas, entre outros. E no final de cada unidade, o livro apresenta a seção "Retomando o que aprendeu", onde sistematiza pro emio de atividades todos os conteúdos trabalhados na unidade.

Dessa maneira, o livro analisado está dividido em 9 unidades, sendo que a Unidade 5 traz como tema *Linguagem Algébrica e Equações*, e está dividida em 8 curtos capítulos. Nesta unidade, os autores buscam desenvolver as seguintes habilidades propostas pela BNCC para unidade temática Álgebra: EF07MA13, EF07MA14, EF07MA15, EF07MA16 e EF07MA18.

No primeiro capítulo "Sequências", o autor define sequências, que são aquelas que apresentam uma ordem preestabelecida (JÚNIOR e CASTRUCCI, 2018, p. 132), observa a regularidade presente e define o termo geral da sequência. O capítulo 2 "Expressões algébricas" inicia com a definição: são expressões matemáticas que apresentam números e letras, ou somente letras, e envolvem operações (JÚNIOR e CASTRUCCI, 2018, p. 135). Essas letras que representam números são chamadas de *variáveis,* mostrando exemplos em que a letra pode assumir o valor de qualquer número real não-nulo. E ao substituir, obtém-se o valor numérico da expressão algébrica. O capítulo 3, "Igualdade", traz a seguinte definição: uma sentença matemática que usa o símbolo = representa uma *igualdade* (JÚNIOR e CASTRUCCI, 2018, p. 136); também identifica os membros da igualdade, as propriedades, e os princípios de equivalência. No capítulo 4 "Equações", o autor traz duas situações iniciais mostrando que podemos transformar um texto em uma linguagem matemática, com letras e símbolos. Assim, equação é toda sentença matemática expressa por uma igualdade, na qual haja um ou mais símbolos que representem números desconhecidos (JÚNIOR e CASTRUCCI, 2018, p. 140). Cada símbolo que representa esses números desconhecidos é chamado de *incógnita*.

Já o capítulo 5, "Conjunto universo e conjunto solução de uma equação", traz situações onde devemos encontrar o conjunto solução da equação a partir da substituição da incógnita por um valor dado. Se essa substituição tornar a sentença verdadeira, o valor é *raiz* ou *solução* da equação. No capítulo 6, "Equações equivalentes", o autor inicia fazendo referência à História da Álgebra, citando obras importantes para o progresso na resolução de equações. Também define equações equivalentes como equações que possuem a mesma raiz ou solução (JÚNIOR e CASTRUCCI, 2018, p. 146), citando os princípios de equivalência e mostrando exemplos de como encontrar equações equivalentes às outras. O capítulo 7 “Equações do 1º grau com uma incógnita”, traz a definição deste tipo de equação: é “toda equação que pode ser reduzida à forma **ax + b= 0**, em que *x* representa a incógnita e *a* e *b* são números racionais, com a ≠ 0”, sendo *a* e *b* denominados coeficientes da equação (JÚNIOR e CASTRUCCI, 2018, p. 150). Também mostra que para resolver equações, deve-se utilizar os princípios de equivalência. O capítulo 8, “Equações na resolução de problemas”, traz os passos a serem seguidos para resolver esses problemas, e mostra através de exemplos:

1 – ler com atenção o problema e levantar os dados.

2 – traduzir o enunciado para a linguagem das equações.

3 – resolver a equação estabelecida.

4 – analisar o resultado obtido e dar a resposta conveniente.

Para tanto, temos a seguinte tabela:

Itens para análise do livro didático	**Resultados**
Competências e habilidades definidas pela BNCC	São desenvolvidas no texto
Definição de equação	Apresentada apenas na definição inicial de equação, e de equações do 1º grau com uma incógnita
Definição de incógnita	Apresenta a definição de maneira bem simples e concisa
Métodos de resolução da equação	- Tentativa e erro - Princípios de equivalência

Tabela 5 – Análise do livro didático 4

4.2 – ANÁLISE DE RESULTADOS

Levando em consideração os as competências e habilidades propostas pela BNCC para o desenvolvimento do pensamento algébrico no sétimo ano do Ensino Fundamental, e que já foram expostos neste trabalho, chegamos à conclusão de que nem todos os livros aqui analisados, mesmo não estando dentro do proposto pela BNCC (afinal, é de um ano anterior ao documento), pois não abordam de maneira tão ampla os conceitos de equação, e especialmente da Incógnita.

Nos livros analisados, sempre é feita a definição da Equação de forma sucinta, com foco na resolução dessas equações, buscando encontrar o valor desconhecido, que é a Incógnita. Porém, os livros didáticos deixam a desejar nos exemplos de resolução de Equações, pois não ficam claros os passos a serem seguidos; alguns nem estabelecem esses passos como regras a serem seguidas. Isto implica no que sugere a BNCC, pois os alunos acabam não formalizando os conhecimentos necessários para construir estratégias de cálculo algébrico.

Portanto, vale lembrar das dificuldades encontradas pelos alunos durante o processo de ensino e aprendizagem da Álgebra, neste caso, no ensino de Equações. Grecco (2008), utilizando as ideias de Booth (1995), nos apresentou algumas dessas dificuldades. Assim, podemos iniciar citando que, enquanto a atividade numérica busca encontrar soluções estritamente numéricas, as atividades algébricas, além de realizar procedimentos e estabelecer relações, também buscam encontrar soluções mais simplificadas, porém, algébricas (GRECCO, 2008, p. 25).

Outra dificuldade encontrada é a respeito do uso correto dos símbolos operatórios, como “+” ou “=”, pois muitas vezes o aluno atribui a esses símbolos o significado aritmético, sendo que na Álgebra tais símbolos assumem outros objetivos. P.ex., na expressão $2a + 5b$, o aluno obtém como resultado $7ab$, o que não condiz com as regras e procedimentos propostos (GRECCO, 2008, p. 25).

Vale ressaltar que os livros didáticos não são livros de receitas, que sozinhos não constroem conhecimentos, e por muitas vezes quando o professor não tem outras alternativas de abordagens, acaba utilizando tais livros como único recurso didático em sala de aula, única fonte de pesquisa. Afinal, “a simples repetição de regras e fórmulas, não possibilita ao aluno fazer conexões e pensar de forma autônoma e nem facilita a compreensão dos conceitos e procedimentos estabelecidos pela Álgebra” (OLIVEIRA e LAUDARES, s.d., p. 3).

Por outro lado, um livro didático bem elaborado, rico de informações, aliado ao trabalho do professor, pode sim gerar bons resultados no processo de ensino e aprendizagem de Álgebra, em especial, de Equações.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho trouxe um breve estudo sobre a Incógnita da Equação do 1º Grau, no Ensino Fundamental. Para tanto, ressaltamos as dificuldades encontradas pelos alunos na compreensão deste conteúdo, visto que muitas vezes é tratado apenas como um conjunto de regras de resolução.

Desse modo, este trabalho partiu da necessidade de verificar como os livros didáticos vêm abordando a Incógnita no conhecimento e na resolução de Equações do 1º Grau, no sétimo ano do Ensino Fundamental. Com isso, buscou-se descobrir se os livros didáticos analisados estão de acordo com as competências e habilidades estabelecidas pela BNCC, para o referido ano.

Conforme vimos no capítulo 1, o trabalho iniciou trazendo um pouco da História da Álgebra, como foco nas Equações, a partir da revisão de literatura. Também se fez necessário mostrar as competências e habilidades estabelecidas pela BNCC para o sétimo ano do Ensino Fundamenta, enfatizando os objetos de conhecimento da unidade temática Álgebra.

Diante do exposto, a análise dos livros didáticos contribuiu satisfatoriamente para o desenvolvimento deste trabalho, visto que estes livros atenderam ao proposto para o referido ano do Ensino Fundamental.

Por fim, reforço ainda a importância do uso das letras no ensino da Álgebra, e no desenvolvimento do pensamento algébrico, uma vez que assumem significados diversos: seja como variável ou incógnita, é de fundamental importância que o aluno compreenda tais significados e construa noções algébricas necessárias e estabeleça relações entre as dimensões da Álgebra, garantindo, assim, uma aprendizagem mais sólida e com significados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALDIM, Márcia Aparecida. **Resolução de problemas como metodologia de ensino e aprendizagem de equações do 1º grau**. Produção Didático-Pedagógica – Unidade Didática - apresentada ao Programa de Desenvolvimento Educacional – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

BARBEIRO, Eulália da Conceição Canada. **A aprendizagem das equações do 1º grau a uma incógnita:** Uma análise dos erros e das dificuldades de alunos do 7º ano de escolaridade.2012, 109 f. Relatório da Prática de Ensino Supervisionada (Mestrado em Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e Secundário) – Universidade de Lisboa, 2012.

BAUMGART, J. (1992). **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula**: Álgebra. São Paulo: Atual editora. Acesso em: 15 de junho de 2020. Disponível em: https://www.oeducador.com/download.php?arquivo=27752Algebra___Hist_da_Matematica___John_Baumgart.pdf

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini**. vol.2. 9.ed. São Paulo: Moderna, 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998. 148 p.

BOYER, Carl. **História da Matemática**. São Paulo: Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

CARAÇA, Bento de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa, 1951. Disponível em: http://im.ufrj.br/~nedir/disciplinas-Pagina/Caraca_ConceitosFundamentais.pdf

CHRISTO, Danilo dos Santos. **Introdução da noção de variável em expressões algébricas por meio da resolução de problemas:** uma abordagem dinâmica. 2006, 122 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC, São Paulo, 2006.

DUNCAN, David Ewing. **Calendário**. Rio de Janeiro: Ediouro, 1999.

FREITAS, M. A. de (2002). **Equações do 1º Grau**: métodos de resolução e análise de erros no ensino médio. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

GARBI, Gilberto G. **O Romance das Equações Algébricas**. 3. ed. são Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

GRECCO, Emily Cassiana Santolin. **O uso de padrões e sequências**: uma proposta de abordagem para introdução à álgebra para alunos de sétimo ano do ensino fundamental. 2008, 165 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – PUC, são Paulo, 2008. Disponível em: http://pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/emily_cassiana_santolin.pdf .

JÚNIOR, José Ruy Giovanni; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da matemática**. vol.2. 4.ed. São Paulo: FTD, 2018.

LIMA, R. N. **Equações Algébricas no ensino Médio**: uma jornada por diferentes mundos da matemática. 2007. 358 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontíficia Universidade Católica de são Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em: https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/11251

MOL, Rogério S. **Introdução à História da Matemática**. Belo Horizonte: CAED – UFMG, 2013.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. vol. 2. 18. ed. **Matemática**: ideias e desafios. São Paulo: Saraiva, 2016.

OLIVEIRA, Carlos N. C. de; FUGITA, Felipe. **Geração Alpha Matemática**. vol.2. 2.ed. São Paulo: Edições SM, 2018.

OLIVEIRA, Silvânia Cordeiro de; LAUDARES, João Bosco. **Pensamento algébrico:** uma relação entre álgebra, aritmética e geometria. PUC-MG/Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, s.d.

PALHARES, O. O ensino e a aprendizagem da matemática na perspectiva piagetiana. Volume I, nº 1 – Jan/Jun, 2008. Disponível em: https://revistas.marilia.unesp.br/index.php/scheme/article/view/554

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no Ensino Básico**. Lisboa: DGIDC, 2009. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/7105/1/Ponte-Branco-Matos%20%28Brochura_Algebra%29%20Set%202009.pdf .

RIBEIRO, A. J. **Elaborando um perfil conceitual de equação**: desdobramentos para o ensino e aprendizagem de matemática. Ciência e Educação, v. 19, n. 1, p. 55-71, 2013. Disponível em: < https://www.redalyc.org/pdf/2510/251025751010.pdf> .

___ . **Equação e seus multisignificados no ensino de matemática**: contribuições de um estudo epistemológico. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11208/1/Alessandro%20Jacques%20Ribeiro.pdf>

ROQUE, Tatiana História da Matemática – Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

SILVA, Antonia Zulmira da. **Pensamento algébrico e equações no Ensino Fundamental:** uma contribuição para o *Caderno do professor* de Matemática do oitavo ano. 2012. 105 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de são Paulo, São Paulo, 2012.